DINÂMICA ESTRUTURAL: ABORDAGEM DIDÁTICA COMPARATIVA ENTRE PROCEDIMENTOS NO TEMPO E NA FREQUÊNCIA

Walnório Graça Ferreira[1], Francisco de Assis das Neves[2], Ricardo Azoubel da Mota Silveira[3], Andréa Regina Dias da Silva[4], Rodrigo Silveira Camargo[5], Wagner Badke Ferreira[6]

Abstract *— The response of structural systems subjected to dynamic loads can traditionally be evaluated in time domain or in frequency domain. Solution methods based in frequency domain have been in development in recent years. The choice of the method depends on the physical properties of the system. In those with frequency-dependent physical properties or with hysteretic damping, frequency domain analysis is recommended. Although time domain methods are easily assimilated by engineering students, the same does not happen to frequency domain methods, especially to civil engineering students. The goal of this article is to introduce a didactic comparison between these two important methods to the solution of structural systems subjected to dynamic loads, in order to make it easier for civil and mechanical engineering students to learn this subject.*

Index Terms — Frequency domain analysis, Fourier transform, multiple-degree-of-freedom system, modal superposition method.

EQUAÇÃO DO MOVIMENTO

Seja um sistema massa-mola com um grau de liberdade, submetido a um carregamento $\mathrm{p}(t)$, como mostrado na Figura 1. A equação do movimento vem da resultante das forças que atuam na massa, que são o próprio carregamento, a força de amortecimento viscoso (proporcional e com sentido contrário ao da velocidade da massa), e a força elástica da mola (proporcional e com sentido contrário ao do deslocamento em relação à posição de equilíbrio). Se $\mathrm{v}(t)$ é o deslocamento no instante t, m é a massa, c é o coeficiente de amortecimento, k é a constante elástica da mola e $\mathrm{p}(t)$ é o carregamento no instante t, então a força resultante é:

$$\sum F = m\,\ddot{\mathrm{v}}(t) = \mathrm{p}(t) - c\,\dot{\mathrm{v}}(t) - k\,\mathrm{v}(t) \tag{1}$$

ou:

$$m\,\ddot{\mathrm{v}}(t) + c\,\dot{\mathrm{v}}(t) + k\,\mathrm{v}(t) = \mathrm{p}(t) \tag{2}$$

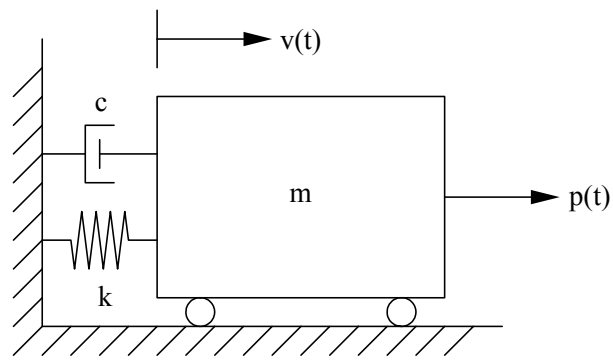

FIGURA. 1
REPRESENTAÇÃO DE UM SISTEMA MASSA-MOLA COM AMORTECIMENTO.

RESPOSTA PERMANENTE A UMA CARGA HARMÔNICA

Domínio do Tempo

A equação do movimento é uma equação diferencial, e sua solução depende do carregamento $\mathrm{p}(t)$. Obtendo-se as soluções para os casos de carregamento senoidal e cossenoidal, encontra-se a solução geral para carregamento harmônico (isto é, uma combinação linear de seno e cosseno com mesma frequência). Assim, definindo a frequência natural do sistema como $\omega = \sqrt{k/m}$ e a taxa de amortecimento como $\xi = \dfrac{c}{2m\omega}$, é possível reescrever a equação do movimento da seguinte forma:

$$\ddot{\mathrm{v}}(t) + 2\xi\omega\,\dot{\mathrm{v}}(t) + \omega^2\,\mathrm{v}(t) = \frac{\mathrm{p}(t)}{m} \tag{3}$$

1 Walnório Graça Ferreira, Universidade Federal do Espírito Santo – Av. Fernando Ferrari, 514 – Campus de Goiabeiras, Vitória-ES, walnorio@pesquisador.cnpq.br
2 Francisco de Assis das Neves, Universidade Federal de Ouro Preto – Campus Morro do Cruzeiro, Ouro Preto-MG, fassis@em.ufop.br
3 Ricardo Azoubel da Mota Silveira, Universidade Federal de Ouro Preto – Campus Morro do Cruzeiro, Ouro Preto-MG, ricardo@em.ufop.br
4 Andréa Regina Dias da Silva, Universidade Federal de Ouro Preto – Campus Morro do Cruzeiro, Ouro Preto-MG, andreadiassilva@yahoo.com.br
5 Rodrigo Silveira Camargo, COPPE/Universidade Federal do Rio de Janeiro – Centro de Tecnologia, Bloco B, Sala 101, Cidade Universitária-RJ, rodrigo_camargo2000@yahoo.com
6 Wagner Badke Ferreira, Universidade Federal do Espírito Santo – Av. Fernando Ferrari, 514 – Campus de Goiabeiras, Vitória-ES, wagnerbadke@yahoo.com.br

Adotando o carregamento $\mathrm{p}(t) = b\,\mathrm{sen}\,\overline{\omega}t$ de freqüência angular $\overline{\omega}$ e definindo $\beta = \overline{\omega}/\omega$, chega-se na equação do movimento, que é dada por:

$$\mathrm{v}(t) = \frac{b}{k}\left[\frac{1}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}\right]\left[(1-\beta^2)\,\mathrm{sen}\,\overline{\omega}t - 2\xi\beta\cos\overline{\omega}t\right] \tag{4}$$

Da mesma forma, para um carregamento $\mathrm{p}(t) = a\cos\overline{\omega}t$, a solução é:

$$\mathrm{v}(t) = \frac{a}{k}\left[\frac{1}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}\right]\left[2\xi\beta\,\mathrm{sen}\,\overline{\omega}t + (1-\beta^2)\cos\overline{\omega}t\right] \tag{5}$$

E, finalmente, quando as duas cargas atuam simultaneamente, a solução geral é:

$$\mathrm{v}(t) = \frac{1}{k}\left[\frac{1}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}\right]\Big\{[b(1-\beta^2) + 2a\xi\beta]\,\mathrm{sen}\,\overline{\omega}t + \\ + [a(1-\beta^2) - 2b\xi\beta]\cos\overline{\omega}t\Big\} \tag{6}$$

Domínio da Frequência

Pode-se tirar proveito das propriedades periódicas da função exponencial complexa [1] e aplicar uma "carga complexa" $\mathrm{p}(t) = be^{i\overline{\omega}t}$. Assim, a equação do movimento fica:

$$\ddot{\mathrm{v}}(t) + 2\xi\omega\,\dot{\mathrm{v}}(t) + \omega^2\,\mathrm{v}(t) = \frac{b}{m}e^{i\overline{\omega}t} \tag{7}$$

cuja solução é:

$$\mathrm{v}(t) = \mathrm{G}(\overline{\omega})e^{i\overline{\omega}t} \tag{8}$$

em que:

$$\mathrm{G}(\overline{\omega}) = \frac{b}{k}\left[\frac{1}{(1-\beta^2) + i(2\xi\beta)}\right] = \frac{b}{k}\left[\frac{(1-\beta^2) - i(2\xi\beta)}{(1-\beta^2) + (2\xi\beta)^2}\right] \tag{9}$$

Essa resposta mostrou-se ser mais simples, visto que apresenta um único termo. No domínio do tempo, há os termos em seno e cosseno.

RESPOSTA A CARGA PERIÓDICA QUALQUER

Domínio do Tempo

Um carregamento periódico qualquer (isto é, não necessariamente harmônico) pode ser expresso na forma de uma série de Fourier:

$$\mathrm{p}(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\overline{\omega}_n t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\,\mathrm{sen}\,\overline{\omega}_n t \tag{10}$$

com:

$$a_0 = \frac{1}{T_p}\int_0^{T_p}\mathrm{p}(t)dt \\ a_n = \frac{2}{T_p}\int_0^{T_p}\mathrm{p}(t)\cos\overline{\omega}_n t dt \\ b_n = \frac{2}{T_p}\int_0^{T_p}\mathrm{p}(t)\,\mathrm{sen}\,\overline{\omega}_n t dt \tag{11}$$

A resposta do sistema a esse carregamento é dada por:

$$\mathrm{v}(t) = \frac{1}{k}\Bigg(a_0\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(1-\beta_n{}^2)^2 + (2\xi\beta_n)^2}\right] \\ \Big\{[b_n(1-\beta_n{}^2) + 2a_n\xi\beta_n]\,\mathrm{sen}\,\overline{\omega}t + \\ + [a(1-\beta^2) - 2b\xi\beta]\cos\overline{\omega}t\Big\}\Bigg) \tag{12}$$

Domínio da Frequência

Também é possível expressar o carregamento como uma série de Fourier complexa, da seguinte forma:

$$\mathrm{p}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n e^{i\overline{\omega}_n t} \tag{13}$$

com:

$$P_n = \frac{1}{T_p}\int_0^{T_p}\mathrm{p}(t)e^{i\overline{\omega}_n t}dt \tag{14}$$

Nesse caso, encontra-se a resposta a cada componente da série, que valerá:

$$\mathrm{v}_n(t) = H_n P_n e^{i\overline{\omega}_n t} \tag{15}$$

Sendo $\mathrm{v}_n(t)$ complexo, significando um vetor real girando no plano complexo. H_n é definido a seguir:

$$H_n = \frac{1}{k}\left[\frac{1}{(1-\beta_n{}^2) + i(2\xi\beta_n)}\right] = \frac{1}{k}\left[\frac{(1-\beta_n{}^2) - i(2\xi\beta_n)}{(1-\beta_n{}^2)^2 + (2\xi\beta_n)^2}\right] \tag{16}$$

A resposta final valerá:

$$\mathrm{v}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_n P_n e^{i\overline{\omega}_n t} \tag{17}$$

Sendo $\mathrm{v}(t)$ agora real, em virtude da presença de pares conjugados.

RESPOSTA A CARGA GERAL

Domínio do Tempo

Seja a carga geral mostrada na Figura 2 a seguir:

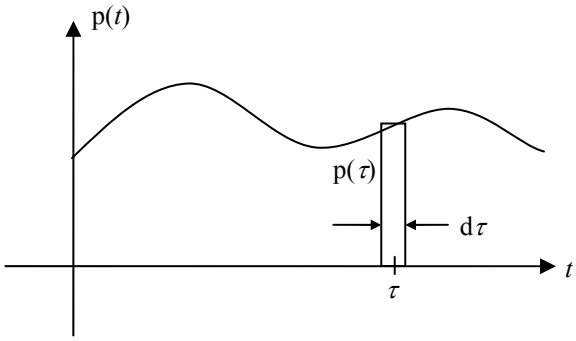

FIGURA. 2
CARGA DIFERENCIAL IMPULSIVA DE UM CARREGAMENTO GERAL.

Baseado na resposta aproximada a uma carga impulsiva $\mathrm{p}(\tau)d\tau$, pode-se chegar à resposta a esse carregamento, que será:

$$\mathrm{v}(t) = \int_0^t \mathrm{p}(\tau)\,\mathrm{h}(t-\tau)d\tau \tag{18}$$

Esta integral é uma integral de convolução [2], e a função $\mathrm{h}(t-\tau)$ é a resposta de impulso unitário, definida por:

$$\mathrm{h}(t-\tau) = \frac{1}{m\omega_0}\,\mathrm{sen}\,\omega_D(t-\tau)e^{-\xi\omega(t-\tau)} \tag{19}$$

em que:

$$\omega_D = \omega\sqrt{1-\xi^2} \tag{20}$$

é a frequência amortecida do sistema massa-mola.

Domínio da Frequência

Fazendo-se uso da transformada de Fourier e aplicando-a na equação do movimento, resulta em:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (m\,\ddot{\mathrm{v}} + c\,\dot{\mathrm{v}} + k\,\mathrm{v})e^{-i\overline{\omega}t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{p}(t)e^{-i\overline{\omega}t}dt \tag{21}$$

ou:

$$(-\overline{\omega}^2 m + i\overline{\omega}c + k)\,\mathrm{V}(\overline{\omega}) = \mathrm{P}(\overline{\omega}) \tag{22}$$

com:

$$\begin{aligned} \mathrm{V}(\overline{\omega}) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{v}(t)e^{-i\overline{\omega}t}dt \\ \mathrm{P}(\overline{\omega}) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{p}(t)e^{-i\overline{\omega}t}dt \end{aligned} \tag{23}$$

Vê-se que a diferença com relação à carga complexa é que agora os limites da integral são $-\infty$ e ∞. Continuando, fica:

$$\mathrm{V}(\overline{\omega}) = \mathrm{H}(\overline{\omega})\,\mathrm{P}(\overline{\omega}) \tag{24}$$

em que:

$$\mathrm{H}(\overline{\omega}) = \frac{1}{-\overline{\omega}^2 m + i\overline{\omega}c + k} = \frac{1}{k}\left[\frac{1}{(1-\beta^2) + i(2\xi\beta)}\right] \tag{25}$$

Após o cálculo de $\mathrm{V}(\overline{\omega})$, a resposta no tempo valerá:

$$\mathrm{v}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{V}(\overline{\omega})e^{i\overline{\omega}t}d\overline{\omega} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(\overline{\omega})P(\overline{\omega})e^{i\overline{\omega}t}d\overline{\omega} \tag{26}$$

SISTEMAS COM MÚLTIPLOS GRAUS DE LIBERDADE

Em sistemas com múltiplos graus de liberdade, a equação do movimento, que rege o deslocamento das múltiplas partes da estrutura, é na verdade uma equação matricial, equivalente à equação do movimento para sistemas com um grau de liberdade, dada por:

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{v}}(t) + \mathbf{c}\dot{\mathbf{v}}(t) + \mathbf{k}\mathbf{v}(t) = \mathbf{p}(t) \tag{27}$$

sendo $\mathbf{m}$ a matriz de massa, $\mathbf{c}$ a matriz de amortecimento, $\mathbf{k}$ a matriz de rigidez, todas de ordem $N \times N$, e $\ddot{\mathbf{v}}(t)$, $\dot{\mathbf{v}}(t)$ e $\mathbf{v}(t)$ vetores $N \times 1$.

O sistema terá também múltiplas frequências naturais de vibração, que são denominadas:

$$\boldsymbol{\omega} = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots \omega_N\} \tag{28}$$

Essas frequências são os autovalores de um sistema de equações lineares cuja equação característica é:

$$\det(\mathbf{k} - \omega^2 \mathbf{m}) = 0 \tag{29}$$

Os autovetores correspondentes são os modos de vibração:

$$\{\hat{\mathbf{v}}_1, \hat{\mathbf{v}}_2, \hat{\mathbf{v}}_3, \ldots \hat{\mathbf{v}}_N\} \tag{30}$$

Esses autovetores possuem as seguintes propriedades, para $r \neq s$:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{v}}_r^T \mathbf{m} \hat{\mathbf{v}}_s &= 0 \\ \hat{\mathbf{v}}_r^T \mathbf{k} \hat{\mathbf{v}}_s &= 0 \end{aligned} \tag{31}$$

Ambas as propriedades são na verdade aplicações da definição generalizada de produto interno entre $\hat{\mathbf{v}}_r$ e $\hat{\mathbf{v}}_s$. Portanto, diz-se que modos de vibração diferentes são perpendiculares entre si, tanto com relação à matriz de massa, quanto com relação à matriz de rigidez [3].

Além disso, para um mesmo modo de vibração, tem-se:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{v}}_n^T \mathbf{m} \hat{\mathbf{v}}_n &= M_n \\ \hat{\mathbf{v}}_n^T \mathbf{k} \hat{\mathbf{v}}_n &= K_n \end{aligned} \tag{32}$$

Os valores M_n e K_n são chamados, respectivamente, de massa generalizada e rigidez generalizada.

Quando se define o conjunto de vetores de modo $\boldsymbol{\varphi}_n = \dfrac{\hat{\mathbf{v}}_n}{\sqrt{M_n}}$, diz-se que são ortonormalizados em relação à matriz de massa, pois além de ortogonais em relação à mesma, tem-se que $\hat{\mathbf{v}}_n^T \mathbf{m} \hat{\mathbf{v}}_n = 1$.

Usando-se os vetores de modo como colunas de uma matriz quadrada, forma-se a matriz de modo $\boldsymbol{\Phi}$:

$$\boldsymbol{\Phi} = \{\boldsymbol{\varphi}_1 \quad \boldsymbol{\varphi}_2 \quad \boldsymbol{\varphi}_3 \quad \cdots \quad \boldsymbol{\varphi}_N\} \tag{33}$$

Desacoplamento das Equações do Movimento pelo Método da Superposição Modal

Os vetores de modo são definidos a partir dos autovetores do sistema, e, por isso, são linearmente independentes. Esse fato permite que sejam usados para gerar qualquer vetor $\mathbf{v}$, através da combinação linear:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\varphi}_1 Y_1 + \boldsymbol{\varphi}_2 Y_2 + \boldsymbol{\varphi}_3 Y_4 + \cdots + \boldsymbol{\varphi}_N Y_N = \sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{\varphi}_n Y_n \tag{34}$$

ou, matricialmente:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\Phi}\mathbf{Y} \tag{35}$$

sendo $\mathbf{Y}$ um vetor que contém os coeficientes Y_n, que são chamados coordenadas modais. Fazendo a substituição de $\mathbf{v}$ assim expressado na equação do movimento para sistemas com múltiplos graus de liberdade, fica:

$$\mathbf{m}\boldsymbol{\Phi}\ddot{\mathbf{Y}}(t) + \mathbf{c}\boldsymbol{\Phi}\dot{\mathbf{Y}}(t) + \mathbf{k}\boldsymbol{\Phi}\,\mathbf{Y}(t) = \mathbf{p}(t) \tag{36}$$

que, pré-multiplicada por $\boldsymbol{\varphi}_n$, fica:

$$\boldsymbol{\varphi}_n \mathbf{m}\boldsymbol{\Phi}\ddot{\mathbf{Y}}(t) + \boldsymbol{\varphi}_n \mathbf{c}\boldsymbol{\Phi}\dot{\mathbf{Y}}(t) + \boldsymbol{\varphi}_n \mathbf{k}\boldsymbol{\Phi}\,\mathbf{Y}(t) = \boldsymbol{\varphi}_n \mathbf{p}(t) \tag{37}$$

Devido às propriedades já apresentadas de ortogonalidade em relação à matrizes de massa e rigidez, a expressão anterior pode ser escrita como:

$$M_n \ddot{Y}_n(t) + C_n \dot{Y}_n(t) + K_n Y_n(t) = p_n(t) \tag{38}$$

Desde que $\mathbf{c}$ seja adotada proporcional às matrizes de massa e rigidez (amortecimento de Rayleigh).

Desse modo, o sistema de equações fica desacoplado e o sistema estrutural de N graus de liberdade com N equações, em coordenadas físicas, é transformado em N equações de um grau de liberdade, em coordenadas modais [4]. Ao se achar a solução de cada equação de um grau de liberdade (isto é, cada Y_n), a solução geral do sistema em coordenadas físicas valerá:

$$\mathbf{v} = \sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{\varphi}_n Y_n \tag{39}$$

Solução no Domínio do Tempo

A solução de cada uma das N equações em coordenadas modais, quando feita no domínio do tempo, através de uma integral de convolução, é:

$$Y_n = \frac{1}{M_n \omega_n} \int_0^t p_n(\tau) e^{-\xi_n \omega_n (t-\tau)} \operatorname{sen} \omega_{Dn}(t-\tau) d\tau \tag{40}$$

Solução no Domínio da Frequência

Aplicando a transformada de Fourier a cada uma das equações em coordenadas modais, estas são passadas para o domínio da frequência, resultando em:

$$V_n(\overline{\omega}) = H_n(\overline{\omega}) P_n(\overline{\omega}) \tag{41}$$

em que:

$$H_n(\overline{\omega}) = \frac{1}{\omega_n^2 M_n}\left[\frac{1}{(1-\beta_n{}^2)+i(2\xi_n\beta_n)}\right] =$$

$$= \frac{1}{\omega_n^2 M_n}\left[\frac{(1-\beta_n{}^2)-i(2\xi_n\beta_n)}{(1-\beta_n{}^2)^2+(2\xi_n\beta_n)^2}\right] \tag{42}$$

$$\mathrm{P}_n(\overline{\omega}) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{p}_n(t) e^{-i\overline{\omega}t} dt$$

Finalmente, aplicando a transformada inversa de Fourier, cada resposta final vale:

$$Y_n(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{V}_n(\overline{\omega}) e^{i\overline{\omega}t} d\overline{\omega} \tag{43}$$

CONCLUSÃO

Este artigo apresenta uma abordagem comparativa entre os procedimentos de solução das equações do movimento no tempo e na frequência para sistemas estruturais submetidos a cargas dinâmicas. O principal objetivo foi pedagógico, no sentido de apresentar as soluções das equações de movimento em uma interessante sequência, primeiramente apresentando-as no domínio do tempo, para em seguida, no domínio da frequência. A abordagem torna as vantagens de se resolver as equações no domínio da freqüência bastante claras, pois as equações diferencias se tornam algébricas e suas soluções são obtidas com operações numéricas simples, com a única diferença de envolver números complexos, que podem ser manipulados da mesma maneira que os números reais.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao CNPq, CAPES, FAPES e FAPEMIG pelo apoio recebido para a realização deste trabalho.

REFERÊNCIAS

[1] Ferreira, W. G.; Camargo, R. S.; Frasson, A.; Mansur, W. J., "O número complexo e seu uso na engenharia estrutural", *XXXV Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia,* Anais, Curitiba, 2007.

[2] Brigham, E. O., *The Fast Fourier Transform,* Prentice-Hall, 1974.

[3] Camargo, R. S., "Técnicas Eficientes de Correção de Erros na Análise Dinâmica de Estruturas no Domínio da Freqüência", *Dissertação (mestrado),* Universidade Federal do Espírito Santo.

[4] Clough, R. W., *Dynamics of Structures,* 2nd Edition, MacGraw-Hill, New York, 1993.