PROCEDIMENTO DE PROJETO PARA FILTROS ANALÓGICOS PASSIVOS PARA CIRCUITOS DE RADIOFREQUÊNCIA

Marco Aurélio de Souza Ferrero[1], Ricardo Antonio Dias[2], Antonio Alves Ferreira Júnior[3]

Abstract *— This paper shows a design procedure for passive analog filters using the Butterworth polynomials, which has characteristic frequency response maximally flat in the pass band. These device are widely using in many circuits of communication equipment in the area of the radiofrequency and microwave. Modeling the circuit as a two port network and through the analysis of the transfer and characteristic functions it is obtained the equations for the design and synthesis of structure. It examines the zeros and poles of the transfer function and applies techniques for removing it at the origin or at infinity, according to the design specification. The coefficients are used for the calculation of the final components of the filters. Present the results obtained through simulations validating the model.*

Index Terms — Butterworth filter, transfer function, characteristic function, two port network.

INTRODUÇÃO

O estudo das topologias dos filtros e seus respectivos polinômios geradores possibilitam uma análise e síntese mais detalhada dos filtros analógicos. Estes dispositivos são de grande importância para os equipamentos de comunicação atuais e com a evolução das tecnologias, cada vez mais o espectro de freqüências vem se tornando escasso. Assim, a filtragem de sinais indesejados ajuda a melhorar a pureza espectral aplicada aos sistemas de radiocomunicação. As aplicações que necessitam de certo grau de seletividade foram fatores determinantes para o início deste estudo. São apresentados alguns modelos, uma técnica de projeto e os resultados, bem como informações úteis para a análise dos dispositivos.

FUNÇÕES *H(S)* E *K(S)*

Apresenta-se o estudo dos polinômios da função de transferência *H(s)* e da função característica *K(s)* através das quais é possível obter os coeficientes para o cálculo dos componentes para a implementação de filtros Butterworth. Considera-se que as funções *H(s)* e *K(s)* assumem o seguinte aspecto [1]

$$H(s) = \frac{e(s)}{q(s)} \tag{1}$$

$$K(s) = \frac{f(s)}{q'(s)} \tag{2}$$

sendo *e(s)*, *f(s)*, *q(s)* e *q'(s)* polinômios em *s*. O projeto de um filtro é feito geralmente em termos de um modelo ideal, sem perdas, obtendo-se a equação fundamental para filtros reativos

$$H(s).H(-s) = 1 + K(s).K(-s) \tag{3}$$

ou fazendo-se $s = j\omega$, tem-se

$$|H(j\omega)|^2 = 1 + |K(j\omega)|^2 \tag{4}$$

Assim, obtém-se a seguinte igualdade,

$$A(j\omega) = 10\log[1 + |K(j\omega)|^2] \tag{5}$$

que representa a atenuação efetiva em termos da função característica *K(s)*, sendo que deve se aproximar dos valores aceitáveis para a faixa de passagem e para a faixa de rejeição do filtro. De (3) obtém-se:

$$\frac{f(s).f(-s)}{q'(s).q'(-s)} = \frac{e(s).e(-s)}{q(s).q(-s)} - 1 \tag{6}$$

sendo que essa igualdade só será satisfeita se seus numeradores e denominadores forem iguais, fazendo *H(s)* e *K(s)* terem o mesmo denominador *q(s)*.

DESCRIÇÃO DO QUADRIPOLO PELOS PARÂMETROS Z E Y

Os dispositivos serão representados em sua condição típica de funcionamento por quadripolos como mostrado na Figura 1. Através da teoria de quadripolos, podem-se separar as partes pares e as ímpares dos polinômios *e(s)* e *f(s)* e estabelecer as expressões de impedância e admitância utilizadas na síntese de filtros, considerando a normalização em relação à resistência R_1 [2].

Obtém-se para *q(s)* de expoente par, obtidas com a saída em circuito aberto [1]

1 Marco Aurélio de Souza Ferrero, Instituto Nacional de Telecomunicações – Inatel, Departamento de Engenharia Elétrica, Avenida João de Camargo, 510, CEP 37540-000, Santa Rita do Sapucaí, MG, Brasil, marco.ferrero@inatel.br.
2 Ricardo Antonio Dias, Instituto Nacional de Telecomunicações – Inatel, Departamento de Engenharia Elétrica, Avenida João de Camargo, 510, CEP 37540-000, Santa Rita do Sapucaí, MG, Brasil, radias@gee.inatel.br.
3 Antonio Alves Ferreira Júnior, Instituto Nacional de Telecomunicações – Inatel, Departamento de Engenharia Elétrica, Avenida João de Camargo, 510, CEP 37540-000, Santa Rita do Sapucaí, MG, Brasil, antonioa@inatel.br.

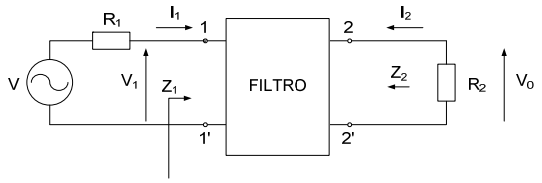

FIGURA 1
QUADRIPPOLO GENÉRIO DE UMA ESTRUTURA BÁSICA DE UM FILTRO.

$$Z_{11}(s) = \frac{e_e(s)(\pm/\mp)f_e(s)}{e_0(s)(\mp/\mp)f_0(s)} \quad (7)$$

$$Z_{22}(s) = r_2.\frac{e_e(s)(\mp/\pm)f_e(s)}{e_0(s)(\mp/\mp)f_0(s)} \quad (8)$$

e também para a saída em curto-circuito

$$Z_{11}(s) = \frac{e_0(s)(\pm/\pm)f_0(s)}{e_e(s)(\mp/\pm)f_e(s)} \quad (9)$$

$$Z_{22}(s) = r_2.\frac{e_0(s)(\pm/\pm)f_0(s)}{e_e(s)(\pm/\mp)f_e(s)} \quad (10)$$

Para *q(s)* de expoente ímpar, com a saída em circuito aberto, têm-se

$$Z_{11}(s) = \frac{e_0(s)(\pm/\mp)f_0(s)}{e_e(s)(\mp/\mp)f_e(s)} \quad (11)$$

$$Z_{22}(s) = r_2.\frac{e_0(s)(\mp/\pm)f_0(s)}{e_e(s)(\mp/\mp)f_e(s)} \quad (12)$$

para saída em curto-circuito

$$Z_{11}(s) = \frac{e_e(s)(\pm/\pm)f_e(s)}{e_0(s)(\mp/\pm)f_0(s)} \quad (13)$$

$$Z_{22}(s) = r_2.\frac{e_e(s)(\pm/\pm)f_e(s)}{e_0(s)(\pm/\mp)f_0(s)} \quad (14)$$

A função destes parâmetros será discutida a seguir, sendo que fornecerão informações importantes sobre o comportamento e/ou características do filtro, como a impedância de entrada, o ganho de transferência direto, o ganho de transferência reverso e a impedância de saída.

MÉTODOS DE APROXIMAÇÃO

Na fase de aproximação, a atenuação deve se aproximar dos valores aceitáveis na faixa de passagem e na faixa de rejeição de um determinado filtro. No caso da faixa de passagem, a função $f(\Omega)$ se confunde com a reta A = 0, tornando-se crítico o problema da aproximação, pois não se toleram desvios acentuados da função $A(\Omega)$ em relação a função $A = 0$, da qual deve se aproximar como mostrado na Figura 2 [1].

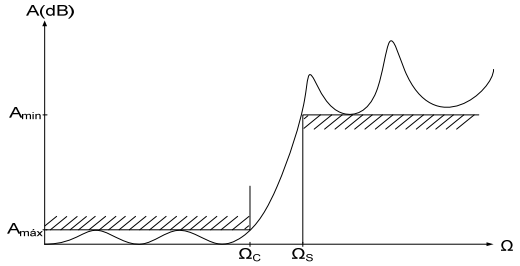

FIGURA 2
CURVA DA ATENUAÇÃO EM FUNÇÃO DA FREQÜÊNCIA DE UM FILTRO.

MÉTODO DE BUTTERWORTH

O método do achatamento máximo, mais conhecido como método de Butterworth, para o cálculo dos coeficientes do filtro se caracteriza por concentrar maior aproximação em um intervalo relativamente estreito, dentro do qual o erro ou desvio se mantém mínimo. Usa-se largamente em vários tipos de aplicações por apresentar em sua faixa de passagem uma resposta muito plana. Uma função apresenta um achatamento máximo em um ponto $\Omega = \Omega_C$ se tanto a respectiva função como o maior número possível de suas derivadas se anularem nesse ponto, verificando as condições [1]

$$A(\Omega_C) = A'(\Omega_C) = A''(\Omega_C) = 0 \quad (15)$$

Particularizando as expressões gerais *H(s)* e *K(s)* para *H(jω)* e *K(jω)*, tem-se

$$j\Omega = j\frac{\omega}{\omega_C} \quad (16)$$

Comparando as expressões de *H(s)* e *K(s)* dadas por (1) e (2) tem-se que $A(\Omega)$ admite pólos de atenuação, ou seja, $A(\Omega)$ tende a infinito quando $q(j\Omega) = 0$. Como as duas funções têm o mesmo denominador, conclui-se que os pólos de atenuação são determinados pelos zeros das funções $H(j\Omega)$ e $K(j\Omega)$. Os zeros de atenuação correspondem aos zeros da função característica $K(j\Omega)$ de acordo com (4) e (5), baseando-se na construção da função característica definida pela igualdade

$$K(s) = \frac{\varepsilon^m}{q(s)} \quad (17)$$

sendo ε o valor que a função característica assume no limite $\omega C = 2\pi fC$ da faixa de passagem, e *m* o grau do filtro aproximado pelo método de Butterworth. Para o caso mais simples tem-se *q(s)* = 1 e para *m* par

$$K(s).K(-s) = \varepsilon^m.s^{2m} \quad (18)$$

e *m* ímpar

$$K(s).K(-s) = -\varepsilon^m.s^{2m} \quad (19)$$

Da equação da atenuação dada em (5) tem-se

$$A_{máx} = 10\log(1+\varepsilon^2) \tag{20}$$

$$\varepsilon = \sqrt{10^{0,1\cdot máx} - 1} \tag{21}$$

No caso de filtros passa-baixas (PB) normalizados, usa-se geralmente f_C como referência para normalização, com $\Omega_C = 1$ e $r_2 = 1\Omega$. Então, tem-se $\varepsilon = |K(j1)|$.

$$A_{\min} = 10\log(1+\varepsilon^2\Omega_S{}^{2m}) \tag{22}$$

Donde se pode após algumas manipulações matemáticas chegar às seguintes equações

$$\Omega_S{}^{2m} = \frac{10^{0,1A_{\min}} - 1}{10^{0,1A_{máx}} - 1} \tag{23}$$

$$m \geq \frac{\log(\Omega_S{}^m)}{\log(\Omega_S)} \tag{24}$$

FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA DE BUTTERWORTH

De acordo com a Figura 3 tem-se

$$\sqrt{\alpha_K{}^2 + \beta_K{}^2} = \frac{1}{\varepsilon^{1/m}} \tag{25}$$

$$\theta_K = \frac{2k+1}{2m}\pi \tag{26}$$

com k = 0, 1, 2, 3, …, n. Realizando-se algumas manipulações matemáticas e conhecidos

$$a_K = -2\alpha_k \tag{27}$$

$$b_K = \alpha_K{}^2 + \beta_K{}^2 \tag{28}$$

$$a_K = \frac{1}{\varepsilon^{1/m}}\cos\theta_K \tag{29}$$

$$\beta_K = \frac{1}{\varepsilon^{1/m}}\sin\theta k \tag{30}$$

obtém-se então o polinômio *e(s)*. Para *m* par

$$e(s) = \varepsilon\prod_{k=1}^{m/2}(s^2 + a_K + b_K) \tag{31}$$

e para *m* ímpar,

$$e(s) = \varepsilon(s+\sigma)\prod_{k=1}^{(m-1)/2}(s^2 + a_K s + b_k) \tag{32}$$

onde as raízes são tomadas duas a duas por seus pares conjugados e que manipulado algebricamente gera o polinômio

$$e(s) = d_0 + d_1 s + d_2 s^2 + d_3 s^3 + \ldots + d_m s^m \tag{33}$$

que vale tanto para *m* par quanto para *m* ímpar.

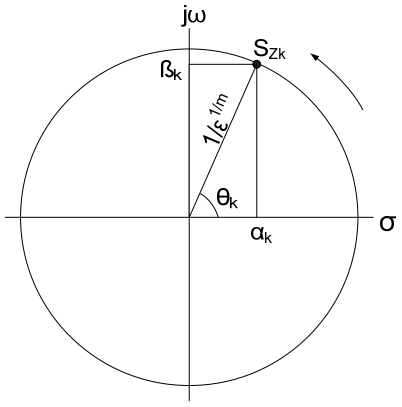

FIGURA 3
RAÍZES NO PLANO S.

SÍNTESE DE FILTROS

Os parâmetros *Z* e *Y* são, respectivamente, impedâncias em circuito aberto e admitâncias em curto-circuito. Então, considera-se o filtro aberto na extremidade onde o processo se inicia e com a extremidade oposta aberta ou em curto-circuito, sendo desconsiderados os elementos resistivos do gerador e carga no cálculo dos coeficientes do filtro.

Pólos na origem e no infinito

A reatância de um indutor é dada por $X_L = \Omega L$ e a de um capacitor por $X_C = -1 / \Omega C$ (Figura 4), sendo um pólo na origem e um pólo no infinito, respectivamente.

FIGURA 4
PÓLOS NA ORIGEM E NO INFINITO.

Analisando-se a Figura 5, tem-se que a tensão V_0 se anula quando $\Omega \to 0$, devido à reatância de C_2 ser infinita (circuito aberto) e devido à reatância de L_2 ser nula (curto-circuito). E também quando $\Omega \to \infty$, devido à reatância de L_1 ser infinita (circuito aberto) e devido à reatância de C_1 ser nula (curto-circuito). Dessa maneira, C_1, L_1, C_2 e L_2 contribuem para formação de pólos na origem e infinito para a função *H(s)* [2].

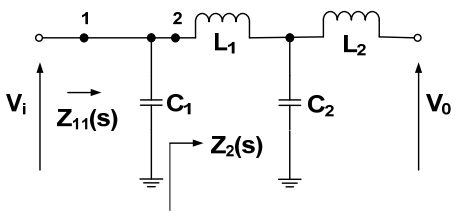

FIGURA 5
FILTRO PASSA-BAIXAS NORMALIZADO.

A remoção de um pólo permite determinar os valores dos componentes indutivos e capacitivos construindo a impedância $Z_{11}(s)$ (ponto 1) e $Z_2(s) = Zr(s)$ (ponto 2), restante da síntese no circuito da Figura 5. Este processo se dá com a remoção de cada pólo partindo do resto do pólo anterior, até a outra extremidade do filtro onde a síntese termina. A impedância na extremidade ou em pontos intermediários de um filtro puramente reativo é dada pela equação

$$Z(s) = \frac{a_p s^p + a_{p-2} s^{p-2} + a_{p-4} s^{p-4} + \ldots}{a_q s^q + a_{q-2} s^{q-2} + a_{q-4} s^{q-4} + \ldots} \quad (34)$$

onde p = q+1 ou p = q-1.

RESUMO E GENERALIZAÇÃO

A seqüência abaixo traz um resumo com as sínteses e os coeficientes de *Z(s)*, onde os pólos indutivos e capacitivos se darão em termos da indutância normalizada *l* ou da capacitância normalizada *c*.

- Remoção de um pólo indutivo no infinito (indutor longitudinal), para *p* par e *p* ímpar em (35):

$$Zr(s) = \frac{b_{p-2} s^{p-2} + b_{p-4} s^{p-4} + \ldots}{a_{p-1} s^{p-1} + a_{p-3} s^{p-3} + \ldots} \quad (35)$$

$$b_{p-2} = a_{p-2} - a_{p-3} l \quad (36)$$

$$l = \frac{a_p}{a_{p-1}} \quad (37)$$

- Remoção de um pólo capacitivo no infinito (capacitor transversal), para *p* par e *q* ímpar em (38):

$$Zr(s) = \frac{a_{q-1} s^{q-1} + a_{q-3} s^{q-3} + \ldots}{b_{q-2} s^{q-2} + b_{q-4} s^{q-4} + \ldots} \quad (38)$$

$$b_{q-2} = a_{q-2} - a_{q-3} c \quad (39)$$

$$c = \frac{a_q}{a_{q-1}} \quad (40)$$

- Remoção de um pólo capacitivo na origem (capacitor longitudinal), para *p* par e *q* = *p* +/- 1:

$$Zr(s) = \frac{b_{p-1} s^{p-1} + b_{p-3} s^{p-3} + \ldots + b_1 s}{b_{q-1} s^{q-1} + b_{q-3} s^{q-3} + \ldots + b_0} \quad (41)$$

$$b_{p-1} = a_p c \quad (42)$$

$$b_{q-1} = a_q c \quad (43)$$

$$c = \frac{a_1}{a_0} \quad (44)$$

- Remoção de um pólo indutivo na origem (indutor transversal), para *p* ímpar e *q* = *p* +/- 1:

$$Zr(s) = \frac{b_{p-1} s^{p-1} + a_{p-3} s^{p-3} + \ldots + b_0}{b_{q-1} s^{q-1} + b_{q-3} s^{q-3} + \ldots + b_1} \quad (45)$$

$$b_{p-1} = a_p l \quad (46)$$

$$b_{q-1} = a_q l \quad (47)$$

$$l = \frac{a_1}{a_0} \quad (48)$$

RESULTADOS

Como exemplo, será apresentado o projeto de um filtro do tipo passa-baixas com freqüência de corte (f_c) em 100MHz, com uma atenuação de 20dB na freqüência de 250MHz (f_s), considerando as impedâncias do gerador e da carga iguais a 50Ω.

1º Passo: Cálculo da ordem do filtro.

$$\Omega_S = \frac{f_S}{f_0} = 2{,}5$$

$$\varepsilon = \sqrt{10^{0,3} - 1} = 0{,}997628$$

$$PD = \frac{\sqrt{10^2} - 1}{0{,}997628} = 9{,}973531$$

$$m \geq \frac{\log(9{,}973531)}{\log(2{,}5)} \rightarrow m \geq 2{,}51 \rightarrow m = 3$$

$$A_{\min} = 10 \log[1 + (0{,}997628.2{,}5)^2 = 23{,}8736[dB]$$

O valor da atenuação mínima é ligeiramente diferente da especificada no projeto, porém aceitável.

2º Passo: Cálculo dos coeficientes do polinômio.

Para m ímpar e de acordo com (33), tem-se

$$e_e(s) = d_0 + d_2 s^2 \quad , \quad e_0(s) = d_1 s + d_3 s^3$$

$$\sigma_0 = \frac{1}{0{,}997628^{1/3}} = 1{,}000792$$

e utilizando (32)

$$e(s) = 0{,}997628(s + 1{,}000792)(s^2 + a_1 s + b_1)$$
$$e(s) = 0{,}997628[s^3 + (a_1 + 1)s^2 + (b_1 + a_1)s + b_1]$$
$$d_3 = \varepsilon \text{ , } d_2 = \varepsilon(a_1 + {}_1) \text{ , } d_1 = \varepsilon(b_1 + a_1) \text{ , } d_0 = \varepsilon b_1$$

3º Passo: Cálculo de a_1 e b_1.

Tem-se que α_1 = -0,500396 e β_1 = 0,866711, e através de (27) e (28), tem-se a_1 = 1,000792 e b_1 = 1,001582. Substituindo os valores encontrados nas equações, obtém-se

$$d_3 = 0{,}997628 \text{, } d_2 = 1{,}996046 \text{, } d_1 = 1{,}997626 \text{, } d_0 \approx 1$$
$$e_e(s) = 1 + 1{,}996046 s^2 \text{ , } e_0(s) = 1{,}997626 s + 0{,}997628 s^3$$

4º Passo: Síntese.

Optou-se pelo circuito com saída em aberto para que a capacitância C_2 faça parte da formação de $Z_{11}(s)$. Como $f_0(s) = f(s) = \varepsilon s^m = 0{,}997628 s^3$ para m ímpar, não existindo a parte par de $f(s)$, isto é, $f_e(s) = 0$. Usa-se a (7) ou (9), para cálculo de $Z_{11}(s)$, garantindo que um dos termos da função racional $Z_{11}(s)$, numerador ou denominador, seja do 3º grau. Tem-se,

$$Z_{11}(s) = \frac{e_e(s)}{e_0(s) + f_0(s)} = \frac{1{,}99604 s^2 + 1}{1{,}995256 s^3 + 1{,}997628 s}$$

A impedância $Z_{11}(s)$ possui uma capacitância transversal representando um pólo no infinito. Os graus do numerador e do denominador valem respectivamente, p = 2 e q = 3, de acordo com a condição (40). Como este pólo no infinito é dado por $1/sC_1$, sua remoção parcial começa com [3] c_1 = 1,000396. A impedância $Z_2(s)$ de acordo com (34), é o que sobra após a retirada do pólo. Isto acontece somente se $q > p$, neste caso

$$Z_r(s) = Z_2(s) = Z_{11}(s) - \frac{1}{Cs}$$

De (37) e (38), têm-se

$$b_1 = d_1 - a_0 c_1$$
$$Z_2(s) = \frac{d_2{}^2 + d_0}{(d_1 - a_0 c_1)s} = \frac{1{,}9925 s^2 + 1}{0{,}997230 s}$$

e aplicando (36), chega-se a l_1 = 2,000798. Determinando o novo resto $Z_3(s)$

$$Z_r'(s) = Z_3(s) = Z_2(s) - l_1 s$$
$$Z_3(s) = \frac{1{,}995256 s^2 + 1}{0{,}997230 s} + 2{,}000798 s = \frac{1}{0{,}997230 s}$$

Conclui-se a síntese com o cálculo do coeficiente c_2 = 0, 997230.

5º Passo: Cálculo dos componentes do filtro.

Calculam-se os valores dos componentes que irão compor o esquema elétrico do filtro desejado. Para filtros normalizados com Ω_C = 1rad/s e $r_2 = r_n = R_2 / R_1 = 1$, tem-se

$$C_1 = \frac{1{,}000396}{2\pi 100.10^6.1.50} = 31{,}8436[pF]$$
$$L_1 = \frac{1.50.2{,}000798}{2\pi.100.10^6} = 159{,}2184[nH]$$
$$C_2 = \frac{0{,}997230}{2\pi.100.10^6.1.50} = 31{,}7428[pF]$$

CONCLUSÃO

Conclui-se que, o aprofundamento no conhecimento das topologias de filtros analógicos, sendo no caso deste estudo empregando a técnica de Butterworth, mostra que dependendo da aplicação deve-se escolher outra configuração para a realização da filtragem. Fica claro que uma análise mais aprofundada das topologias e seu entendimento podem gerar circuitos mais elaborados e complexos de se calcular, porém com uma maior precisão.

REFERÊNCIAS

[1] C. P. Serra, *Teoria e projeto de filtros.* 1. ed. Campinas: Cartgraf, 1983.

[2] R. C. Dorf, *Introduction to Electric Circuits*. 6. ed. New York: Jonh Wiley & Sons, 2001.

[3] R. E. Collin, *Foundations for Microwave Engineering*. 2. ed. New York: McGraw-Hill, 2001.